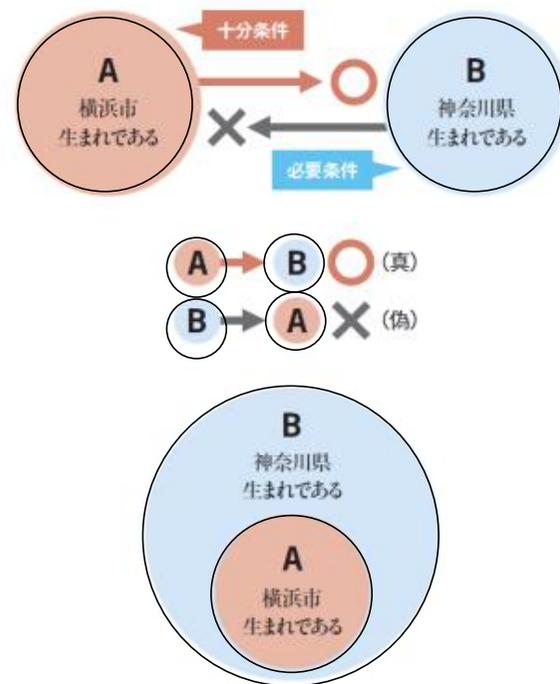


教科書が終わったら次に・・・ 第1弾

センター試験過去問から多数セレクト

「必要十分条件」攻略ブック



2年 ()組 ()番

氏名 ()

<Point 1> 2つの命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であり、「 $p \Leftarrow q$ 」は偽であるとき p は q であるための十分条件である（必要条件ではない）という。

1 m と n を整数とし、条件 q, r を次のように定める。
 $q: m$ と n はともに偶数 $r: m$ または n は偶数
 このとき、 q は r であるための 。 <2007年追>

① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

解説

命題 $q \Rightarrow r$ は真である。

命題 $r \Rightarrow q$ は偽である。（反例： $m=2, n=1$ ）

ゆえに、 q は r であるための十分条件であるが、必要条件でない。 ②

【練習1】

a, b を実数とする。

a, b はともに整数であることは ab が整数であるための 。

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

Point 偽であることを証明するには をあげる

<Point 2> 2つの命題「 $p \Rightarrow q$ 」が偽であり、「 $p \Leftarrow q$ 」は真であるとき p は q であるための必要条件である（十分条件ではない）という。

2 m と n を整数とし、条件 p, q を次のように定める。
 $p: mn$ は偶数 $q: m$ と n はともに偶数
 このとき p は q であるための 。 <2007年追>

① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

解説

命題 $p \Rightarrow q$ は偽である。（反例： $m=2, n=1$ ）

命題 $q \Rightarrow p$ は真である。

(証明) m と n がともに偶数であるから、 $m=2m', n=2n'$ (m', n' は整数) とおける。

このとき $mn = 2m' \cdot 2n' = 2 \cdot 2m'n'$

$2m'n'$ は整数であるから、 mn は偶数である。

ゆえに、 p は q であるための必要条件であるが、十分条件でない。 ①

【練習2】

(1) 命題「 $r^2 - 2s$ が無理数ならば r または s が無理数」の対偶を答えよ。

(2) r または s が無理数であることは、 $r^2 - 2s$ が無理数であるための 。

<2004年追>

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

Point 直接証明が難しいときには を利用

<Point 3> 2つの命題「 $p \Rightarrow q$ 」が「 $p \Leftarrow q$ 」がともに真であるとき p は q であるための必要十分条件であるという。

③ p, q は実数である。 p と q が $(p+q+1)^2 + (q-1)^2 = 0$ を満たすことは、
 $p = -2$ かつ $q = 1$ であるための 。 <2004年追>

① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

解説

p, q が実数であるから、 $(p+q+1)^2 + (q-1)^2 = 0$ と「 $p+q+1=0$ かつ $q-1=0$ 」は同値である。 $p+q+1=0, q-1=0$ を解くと $p = -2, q = 1$

よって、 p と q が $(p+q+1)^2 + (q-1)^2 = 0$ を満たすことは、
 $p = -2$ かつ $q = 1$ であるための必要十分条件である。ゆえに ①

【練習3】

実数 a に関する条件 p, q を次のように定める。

$p: a^2 \geq 2a + 8$ $q: a \leq -2$ または $a \geq 4$

q は p であるための 。 <2009年本>

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

【練習4】

a, b を実数とする。

(1) $a + b = 6$ かつ $ab = 9$ であることは $a = b = 3$ であるための 。

(2) $|a + b| > a + b$ であることは $ab < 0$ であるための 。

(3) 四角形において、2本の対角線の長さが等しいことは、この四角形が長方形となるための 。

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

【練習5】

自然数 n に関する条件 p, q, r, s を次のように定める。

$p: n$ は5で割ると1余る数である $q: n$ は10で割ると1余る数である
 $r: n$ は奇数である $s: n$ は2より大きい素数である

このとき

「 p かつ r 」は q であるための ア。 \bar{r} は \bar{s} であるための イ。

「 p かつ s 」は「 q かつ s 」であるための ウ。 <2010年本>

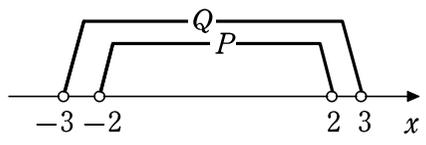
- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが、十分条件でない
 ② 十分条件であるが、必要条件でない ③ 必要条件でも十分条件でもない

Point 2つの命題「 $p \Rightarrow q$ 」が「 $p \Leftarrow q$ 」の真偽を判断するときに、
 p, q それぞれ同値変形して考える。

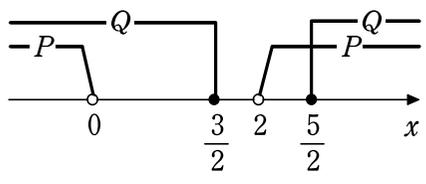
4 x は実数とする。集合を利用して、次の命題の真偽を調べよ。
 (1) $|x| < 2$ ならば $-3 < x < 3$ (2) $|x-1| > 1$ ならば $2|x-2| \geq 1$

解説

(1) $|x| < 2$ から $-2 < x < 2$
 $P = \{x \mid -2 < x < 2\}$, $Q = \{x \mid -3 < x < 3\}$
 とすると $P \subset Q$
 ゆえに、与えられた命題は 真



(2) $|x-1| > 1$ から $x-1 < -1$, $1 < x-1$ したがって $x < 0$, $2 < x$
 また、 $2|x-2| \geq 1$ から $|x-2| \geq \frac{1}{2}$
 ゆえに $x-2 \leq -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq x-2$
 よって $x \leq \frac{3}{2}$, $\frac{5}{2} \leq x$



$P = \{x \mid x < 0, 2 < x\}$, $Q = \{x \mid x \leq \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \leq x\}$ とすると、 $P \subset Q$ は成り立たない。
 ゆえに、与えられた命題は 偽

【練習 6】

(a) $|p-1| < 2\sqrt{3}$ (b) $p^2 < 1$
 (a) は (b) であるための 。

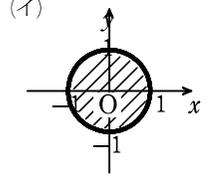
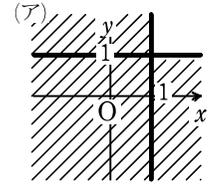
- ① 必要十分条件である
- ② 十分条件であるが、必要条件でない
- ③ 必要条件であるが、十分条件でない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

5 (1) 次の条件が表す領域を図示せよ。
 (ア) $x < 1$ または $y < 1$ (イ) $x^2 + y^2 < 1$

(2) にあてはまるものを、下の (a)~(d) の中から選べ。
 $x < 1$ または $y < 1$ は、 $x^2 + y^2 < 1$ であるための 。

- (a) 必要条件であるが、十分条件でない
- (b) 十分条件であるが、必要条件でない
- (c) 必要十分条件である
- (d) 必要条件でも十分条件でもない

(1) [図] の斜線部分。境界線は含まない。



(2) $x < 1$ または $y < 1$ を満たす (x, y) の集合を A , $x^2 + y^2 < 1$ を満たす (x, y) の集合を B とすると、(1) より、 $A \supset B$ であるから
 $x^2 + y^2 < 1 \implies x < 1$ または $y < 1$ は真 $A \subset B$ でないから
 $x < 1$ または $y < 1 \implies x^2 + y^2 < 1$ は偽

よって、 $x < 1$ または $y < 1$ は $x^2 + y^2 < 1$ であるための必要条件であるが、十分条件でない。ゆえに (a)

Point 2つの条件 p, q を満たす物の全体の集合をそれぞれ P, Q とする。

「 $p \implies q$ が真」 \iff

これを調べる方法として数直線や不等式の表す領域を利用

【練習 7】

「 $|x| < 1$ かつ $|y| < 1$ 」は「 $x^2 + y^2 < 1$ 」が成立するための 。

- ① 必要十分条件である
- ② 十分条件であるが、必要条件でない
- ③ 必要条件であるが、十分条件でない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

章末問題（総復習）

【練習 8】

次の に適するものを必要条件，十分条件，必要十分条件，いずれでもないの中から選べ。ただし， x, y は実数とする。

- (1) $xy=10$ は $x=5$ または $y=2$ であるための
- (2) $x=y=0$ は $x^2+y^2=0$ であるための
- (3) $x < -2$ は $x < 0$ であるための

【練習 9】

a は実数とし， b は 0 でない実数とする。

p : a, b はともに有理数である

q : $a+b, ab, \frac{a}{b}$ はすべて有理数である

条件 q は条件 p が成り立つための 。

<2006年本改題>

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが，十分条件でない
- ② 十分条件であるが，必要条件でない ② 必要条件でも十分条件でもない

【練習 10】

(a) $|p| < 1$

(b) 2次関数 $y = x^2 + (p-1)x + 3$ のグラフの頂点の x 座標， y 座標がともに正である。

(a) は (b) であるための 条件である。

<2002年追>

【練習 11】

自然数 m, n について，条件 p, q, r を次のように定める。

p : $m+n$ は 2 で割り切れる

q : n は 4 で割り切れる

r : m は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる

このとき

p は r であるための ア。

\bar{p} は \bar{r} であるための イ。

「 p かつ q 」は r であるための ウ。

「 p または q 」は r であるための エ。

<2008年本>

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが，十分条件でない
- ② 十分条件であるが，必要条件でない ② 必要条件でも十分条件でもない

【練習 12】

実数 x, y に関する条件 p, q, r, s を次のように定める。

p : $xy \geq 0$

q : $xy \geq x^2$

このとき

p は q であるための 。

<2010年追（改題）>

- ① 必要十分条件である ① 必要条件であるが，十分条件でない
- ② 十分条件であるが，必要条件でない ② 必要条件でも十分条件でもない