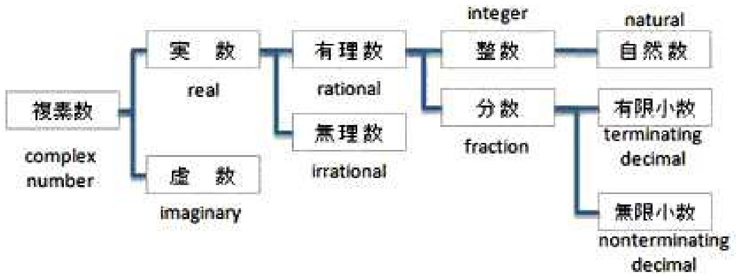
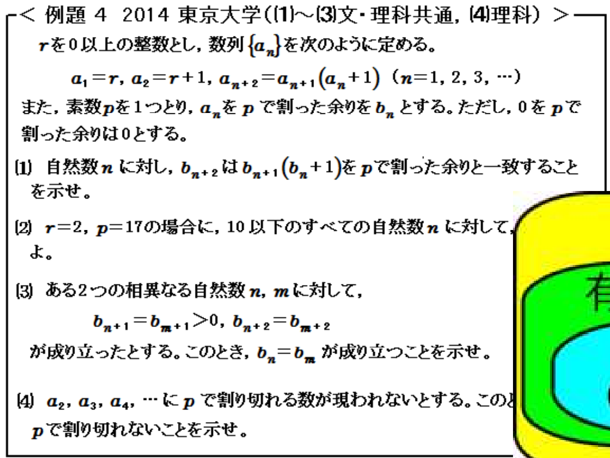
教科書が終わったら次に・・・・シリーズ第3弾

「 整数問題」攻略ブック





< 例題 4　2014 東京大学（(1)～(3)文・理科共通，(4)理科）>

rを0以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数pを1つとり，a_nをpで割った余りをb_nとする。ただし，0をpで割った余りは0とする。

(1) 自然数nに対し，b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りと一致することを示せ。

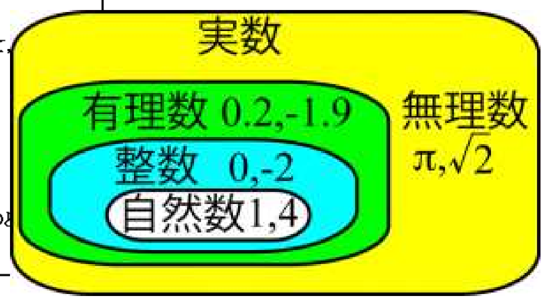
(2) $r=2$，$p=17$の場合に，10以下のすべての自然数nに対して，
よ。

(3) ある2つの相異なる自然数n，mに対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$にpで割り切れる数が現われないとする。このと
pで割り切れないことを示せ。



２年（　　)組（　　)番　３年（　　)組（　　)番

氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　）

数と集合

（例１）

☆ 自然数の集合N　1，2，3，4……

☆ 整数の集合Z　……，−3，−2，−1，0，1，2，3，4……

☆ 素数　１と自分自身以外に正の約数をもたない自然数

・素数は約数の個数が $\boxed{}$ 個である。

・１自身は（　素数である　　素数でない　）　＜正しい方を○で囲む＞

・素数のうち偶数であるものはただ１つだけ存在し，そのほかはすべて奇数である。

☆ a と b は互いに素

2つの整数 a と b が１と −1 以外に公約数をもたない関係にあること。

・26 と（　3　，　4　，　13　，　25　，　52　）は互いに素である。

＜正しいものを○で囲め＞

・互いに素な整数 a と b の最大公約数は $\boxed{}$ である。

☆ 有理数Q　$\dfrac{m}{n}$　（$m \in Z$, $n \in Z$, $n \fallingdotseq 0$）の形で表される数。

・「m と n は互いに素」という条件を追加し，既約分数（それ以上約分できない分数）として考えることが多い。

・有理数 $\dfrac{p}{q}$ （p, q は互いに素な整数，$q \fallingdotseq 0$）が整数ならば $q=\boxed{}$ である。

$\boxed{1}$ （類2016年センター試験）　＜数と集合＞

A を有理数全体の集合，B を整数全体の集合，Cを自然数全体の集合，D を負の整数全体の集合とする。次の(1)～(8) が真の命題となるように，□に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから選べ。

(1) $A \boxed{} B$　(2) $A \boxed{} \{0, 1, 2\}$　(3) $B \boxed{} \{1\}$　(4) $B \boxed{} 1$

(5) $C \boxed{} 0$　(6) $C \boxed{} B$　(7) $B=\{0\} \boxed{} B$　(8) $\phi = C \boxed{} D$

⓪ $\in$　① $\ni$　② $\notin$　③ $\not\ni$　④ $\subset$　⑤ $\supset$　⑥ $\cap$　⑦ $\cup$

整数問題へのアプローチ１（「積の形」を作る）

【例題１】$m^2+mn=2$ を満たす整数の組（m, n）をすべて求めよ。

（解）$m^2+mn=2$ より $m(m+n)=2$　　←←←「積の形」を作る……因数分解

m, $m+n$ は整数なので

m	-2	-1	1	2
$m+n$	-1	-2	2	1

よって，（m, n）＝$(-2, 1)$、$(-1, -1)$、$(1, 1)$、$(2, -1)$

$\boxed{2}$ ＜「積の形」を作る……因数分解＞

$x^2-y^2=5$ をみたす整数 x，yの組（x, y）をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ ＜「積の形」を作る＞

次の等式を満たす整数 x，y の組（x, y）をすべて求めよ。

(1)　$xy+4x-6y=5$

(2)　$2xy+x+y=-3$

整数問題へのアプローチ２（「範囲をしぼる」）

【例題２】$m^2+n^2=10$（$m\in N$(自然数)），$n\in N$）を満たす，自然数の組（m，n）を求めよ。
(解)　$n^2=10-m^2>0$ より $m^2<10$　←←←「範囲をしぼる」(自然数nの２乗は常に正)
　m は自然数なので $m=1,2,3$
　　このうち，n も自然数となるものを求めて　（m，n）＝（1，3）（3，1）

$\boxed{4}$ ＜「範囲をしぼる」……自然数は0より大（１以上）＞
$2x+y=7$ を満たす正の整数の組（x，y）をすべて求めよ。　←←←「範囲をしぼる」(y は正)

$\boxed{5}$ ＜(1)「積の形」を作る　(2)「範囲をしぼる」＞
正の整数 x，y が$x\leqq y$ と $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。
(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を $(x+a)(y+b)=c$（a，b，c は整数）の形に変形せよ。

(2) この条件を満たす x，y の組（x，y）をすべて求めよ。

整数問題へのアプローチ２（「範囲をしぼる」）

（例２）$a<b<c$（$a\in N$(自然数)，$b\in N$，$c\in N$）ならば
　① $a+b+c<c+c+c$ すなわち $a+b+c<3c$ が成り立つ
　② $\boxed{}<a+b+c$ すなわち $\boxed{<a+b+c}$ が成り立つ
　③ 空欄に $\dfrac{1}{a}$ と $\dfrac{1}{b}$ と $\dfrac{1}{c}$ を記入せよ　$\boxed{<<}$ が成り立つ

$\boxed{6}$ ＜「範囲をしぼる」……上の（例２を利用）＞
(1) 正の整数 x，y が$x\leqq y$ を満たすとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{2}{x}$ であることを示せ。

(2) 正の整数 x，y が$x\leqq y$ と $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。この条件を満たす x，y の組（x，y）をすべて求めよ。

$\boxed{7}$ 東京女大（04年）　＜「範囲をしぼる」……上の（例２を利用）＞
a，b，c が整数で，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ かつ $abc=a+b+c$ のとき，$ab\leqq3$ であることを示せ。

8 武蔵工業大学（04年）

108の正の約数は全部で何個あるか。また，それらの正の約数の総和を求めよ。

（例３）倍数の判定法

2 の倍数　一の位が偶数　　5 の倍数 $\boxed{\qquad}$

4 の倍数 $\boxed{\qquad}$ が 4 の倍数　　＜ 8 の倍数　下 3 桁 が 8 の倍数 ＞

3 の倍数　各位の数の $\boxed{\qquad}$ が $\boxed{\qquad}$

9 の倍数　各位の数の $\boxed{\qquad}$ が $\boxed{\qquad}$

6 の倍数 $\boxed{\qquad}$ かつ $\boxed{\qquad}$

9 ＜倍数の判定法＞

○，×を答よ。

(1) 3264 は 2 の倍数である　[　]　　(2) 3264 は 3 の倍数である　[　]

(3) 3264 は 4 の倍数である　[　]　　(4) 3264 は 5 の倍数である　[　]

(5) 3264 は 6 の倍数である　[　]　　(6) 3264 は 9 の倍数である　[　]

整数問題へのアプローチ３（約数･倍数を考える）

（例４）連続する整数の積

① 連続する 2 整数の積は $\boxed{\qquad}$ の倍数である

（連続する 2 整数の少なくとも一方は偶数であるから）

② 連続する 3 整数の積は $\boxed{\qquad}$ の倍数である

（連続する 3 整数の中に必ず $\boxed{\qquad}$ の倍数と $\boxed{\qquad}$ の倍数が含まれるから）

10 宮崎大学（09年）　＜「積の形」を作る＞　＜連続する整数の積＞

n が 2 以上の整数のとき，n^3-n は 6 で割り切れることを示せ。

11 ＜「範囲をしぼる」＞　＜約数･倍数を考える＞

$\dfrac{24}{n^2+8}$ が整数となるよう 整数 n を定めよ。

整数問題へのアプローチ３（約数･倍数を考える）

$\boxed{12}$＜最大公約数、最小公倍数＞

(1) 96 と 120 の最大公約数 g 、最小公倍数 ℓ を求めよ。

$$\big) \; 96 \quad 120$$

(2) 96 と 120 の公倍数のうち、小さい方から数えて 3 番目の数は $\boxed{\qquad\qquad}$

(3) $2\cdot3^2\cdot7$ と $2^2\cdot3^2\cdot5$ の最大公約数 g 、最小公倍数 ℓ を求めよ。

(4) 2109 と 1425 の最大公約数 g を互除法を用いて求めよ。

（例５）$2m=3n$ （$m\in Z$(整数)$,\, n\in Z$ ）が成り立つならば，2 と3 は互いに素なので，

m は $\boxed{\qquad}$ の倍数であり，n は $\boxed{\qquad}$ の倍数である。

$\boxed{13}$＜約数･倍数を考える･･････････一次不定方程式＞

次の一次不定方程式の整数解をすべて求めよ。　　　$13x+5y=0$

整数問題へのアプローチ３（約数･倍数を考える）

$\boxed{14}$＜一次不定方程式＞

次の一次不定方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $13x+5y=1$

(2) $67x+223y=1$

(3) $63x-157y=3$

（例６）

(1) $n=6k+23$（$k\in Z$(整数)）のとき、n を6 で割った余りは $\boxed{\quad}$

(2) $m=7k+3$、$n=7\ell+2$（$k\in Z$(整数)，$\ell\in Z$）のとき、

① $2m+n$ を 7 で割った余りは 1 であることを示せ

② $3m-2n$ を 7 で割った余りは $\boxed{\quad}$ 、mn を 7 で割った余りは $\boxed{\quad}$

m^2+n^2 を 7 で割った余りは $\boxed{\quad}$

ここで何人かは思ったことでしょう。「合同式の方が速くない？」と

（例７）空欄に 0，1，2，3 のいずれかの数を記入せよ。

(1) $5\equiv\boxed{\quad}\pmod 4$　　$18\equiv\boxed{\quad}\pmod 5$

(2) $7\equiv3$、$9\equiv1\pmod 4$ なので

① $7+9\equiv3+1\equiv\boxed{\quad}\pmod 4$　② $7-9\equiv3-1\equiv\boxed{\quad}\pmod 4$

③ $7\times9\equiv3\times1\equiv\boxed{\quad}\pmod 4$　④ $9^{100}\equiv\boxed{\quad}^{100}\equiv\boxed{\quad}\pmod 4$

$\boxed{15}$ ＜合同式　……例6(2)を合同式でやってみよう＞

m，n は 7 で割ったときの余りがそれぞれ 3 と 2 である。次の式を 7 で割った余りを合同式を用いて求めよ。

(1) $2m+n$

(2) m^2+n^2

整数問題へのアプローチ４（剰余、合同式）

$\boxed{16}$ ＜合同式の方が速くない？＞

m を5で割ると2余り，n を5で割ると4余るとき，$m+n$ とmn を5で割った余りをそれぞれ求めよ。

$\boxed{17}$ 00年滋賀大

(1) n を自然数とするとき，n^2 は 3 の倍数かまたは 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき、a，b のうち少なくとも一方は 3 の倍数であることを (1) および背理法を用いて示せ。

（例８）10進法表記で１から10 の値を下の表にまとめよ。

10進数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2進数										
3進数										
8進数										

18 ＜n 進法→10進法＞　　＜10 進法→ n進法＞

(1) 4 進法で表された 3121 を10 進法で表せ。

（参考） 10進法の 3121は同じ10進法で $3\times10^3+1\times10^2+2\times10+1$ と表される。

(2) (1)で求めた10 進法で表された数を4 進法で表すと3121 となることを確かめよ。

（参考） 10進法の 3121 を右のように10 で割ると　余りに係数が並ぶ

$$\begin{array}{r|r} 10 & 3121 \\ \hline 10 & 312 \\ \hline 10 & 31 \\ \hline 10 & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(3) 4 進数 $32.12_{(4)}$ を 10 進法で表せ。

19

10 進数の 72 を n 進法で表すと $110_{(n)}$ となるとき，n を求めよ。

整数問題へのアプローチ５（n 進法）

20

(1) $21201_{(3)}+623_{(7)}$ を計算し，5 進数で答えよ。

(2) $111001_{(2)}-10101_{(2)}$ の計算結果を 2 進法で表せ。

(3) $10011_{(2)}\times101_{(2)}$ の計算結果を 2 進法で表せ。

21

10 進法で表される 2 つの数 N，$N+1$ について，N を 4 進法で表した数と，$N+1$ を 6 進法で表した数は，ともに 2 桁で各位の数字の並びが逆になるという。N を 10 進法で表せ。

章末問題１（Ｐ２の発展問題）

$\boxed{22}$「Ｐ２－２番」ができた人がチャレンジする問題

15 を足しても，16 を引いても平方数になるような自然数 n を求めよ。ただし，平方数とはある自然数の 2 乗で表される数のことである。

$\boxed{23}$「Ｐ２－２番」ができた人がチャレンジする問題

n は自然数とする。$\sqrt{n^2+45}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

章末問題２（Ｐ８の発展問題）

$\boxed{24}$「Ｐ８－14番」ができた人がチャレンジする問題

9 で割ると 4 余り，5 で割ると 3 余る自然数 n を，45 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{25}$「Ｐ８－14番」ができた人がチャレンジする問題

7 で割ると 5 余り，13 で割ると 8 余るような自然数のうち，3 桁で最大のものを求めよ。