放物線上の異なる２個の点での接線が直交しているとする。このとき，接線の交点の軌跡が直線となることを証明しなさい。

平面上の放物線はすべて

(※1)　$C: y = ax^2 \quad (a \neq 0)$

を平行移動や回転移動したものである。よってCだけを考えても一般性を失わない。

$y' = 2ax$ より C上の点S(s, as^2) における接線の方程式は

$$y = 2as(x-s) + as^2$$

$$y = 2asx - as^2 \quad \cdots ①$$

同様にして T(t, at^2)における接線は $y = 2atx - at^2 \quad \cdots ②$

①②が直交するので

$$2as \cdot 2at = -1$$

$$\therefore \ st = -\frac{1}{4a^2} \quad \cdots ③$$

①②の交点は

$$2asx - as^2 = 2atx - at^2$$

とおくと

$$2a(s-t)x = as^2 - at^2$$

$s \neq t$, $a \neq 0$ なので

$$x = \frac{s+t}{2} \quad \cdots ④$$

①より $y = 2as \cdot \dfrac{s+t}{2} - as^2$

$$= ast$$

$$= -\frac{1}{4a} \quad [③より]$$

$$\cdots ⑤$$

ここで③④より s, t は X の2次方程式

$$X^2 - 2xX - \frac{1}{4a^2} = 0$$

の実数解であるが，

判別式 $\dfrac{D}{4} = x^2 + \dfrac{1}{4a^2} > 0$

が常に成り立つので④における x は任意の値をとりうる。(※2)

したがって求める軌跡は⑤より

直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ となり題意が示された。

(※1)「自分で〜を設定」は共通テストモデル問題でも見られた。
「〜として一般性を失わない」という表現方法はマスターしておくべきである。

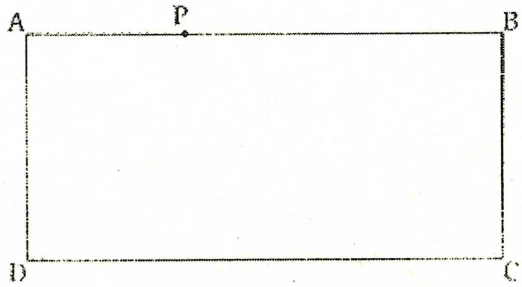
(※2) これを示さないと証明にならない
もし x の値がある範囲に限定されるのであれば「直線」ではなく「線分」や「半直線」の可能性が出てくる。

2017年　東京工大

aを1以上の実数とする．図のような長方形の折り紙ABCDが机の上に置かれている．ただし$AD=1$，$AB=a$である．Pを辺AB上の点とし，$AP=x$とする．頂点Dを持ち上げてPと一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形ABCDからはみ出る部分の面積をSとする．

(1)　Sをaとxで表せ．

(2)　$a=1$とする．PがAからBまで動くとき，Sを最大にするようなxの値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．（白紙は回収しない．）

（解答略）

試験中、受験生が紙を折ったり、線を引いたり……
といった姿が目にうかびます。
ところで、以前から思っていたことですが、図形問題
を解くのに2、3色の色ペンがあったら便利ですね。
入試では認められていないと思います。
皆さんはどう思いますか？

2017年　立命館大（文系）その１

Ⅱ 預金の年利率や株式の配当などに関する次の問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{エ}}$ を除いてすべて整数で答えよ。解答には末尾の表の数値を用いてよい。

(※1)

〔1〕 銀行預金の年利率を２％とする。Aさんが今日500万円を預金し，その後一切預金を行わなかった場合に，10年後に得られる総預金額を複利計算から求めてみる。１年後の総預金額は今日の預金額と得られる利子の合計になるので，$\boxed{\text{ア}}$ 万円となる。この計算を繰り返すことで10年後の総預金額を求めると，$\boxed{\text{イ}}$ 万円となる。

〔2〕 銀行預金の年利率を２％とする。Aさんが今日預金をして５年後に220万円を得るために，今日いくら預金すればよいか考えてみる。５年後に220万円を得るために必要な４年後の総預金額を X とすると，$(1.02)X=220$ であるから，$X=\dfrac{220}{1.02}$ となる。この計算を繰り返すことで，今日預金すべき金額は $\boxed{\text{ウ}}$ 万円となることがわかる。このように，将来のある金額を現在の価値（金額）で表したものを割引現在価値と呼ぶ。

〔3〕 銀行預金の年利率を２％とする。割引現在価値の考え方を利用して株式の価値を求める。

ある企業の株式を購入した人（株主）は，購入した１年後から将来にわたって，株式１単位あたり毎年10万円の配当を得られるとする。企業の株式を１単位持っていると，１年後に得られる配当の割引現在価値は $\dfrac{10}{1.02}$ 万円，２年後に得られる配当の割引現在価値は $\dfrac{10}{1.04}$ 万円である。同様に考えると，10年後に得られる配当の割引現在価値は $\boxed{\text{エ}}$ 万円である。

したがって，購入してから10年後まで毎年配当が得られるとしたとき，この株式１単位の割引現在価値は，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ 万円となる。

表

n	2	3	4	5	6
$(1.02)^n$	1.04	1.06	1.08	1.10	1.13

n	7	8	9	10	11
$(1.02)^n$	1.15	1.17	1.20	1.22	1.24

[1]

$$500\times1.02=510\ (\text{万円})\ \cdots(\text{ア})$$

$$500\times1.02^{10}=500\times1.22$$
$$=610\ (\text{万円})\cdots(\text{イ})$$

[2]

$$X\cdot1.02^5=220\ \text{より}$$

$$X=\frac{220}{1.02^5}=\frac{220}{1.1}$$
$$=200\ (\text{万円})\cdots(\text{ウ})$$

[3]

$$\frac{10}{1.02^{10}}=\frac{10}{1.22}$$
$$=\frac{500}{61}\ (\text{万円})\cdots(\text{オ})$$

$$\underline{\frac{10}{1.02^{10}}+\frac{10}{1.02^{9}}+\frac{10}{1.02^{8}}+\cdots\cdots+\frac{10}{1.02}}$$

(※2)

$$=10\cdot\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{1.02}\right)^k$$

$$=10\cdot\frac{\frac{1}{1.02}\left\{1-\left(\frac{1}{1.02}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{1.02}}$$

$$=500\left(1-\frac{1}{1.02^{10}}\right)$$

$$=500\left(1-\frac{1}{1.22}\right)=\frac{5500}{61}\ (\text{万円})\cdots(\text{オカ})$$

(※1) 預金の利率と等比数列の和については多くの教科書で「発展」「研究」として取り扱われている。しかし，高校生が銀行に積み立て預金をしている話はほとんど聞かない。

(※2)「10年積み立てる」＝「このお金は10年，このお金は9年，……，このお金は1年預金する」の発想は事前に知っておかないと難しい。

Ⅱ　個人Ａの日給 Y_A は，個人Ａの時間給 a と１日に働く時間 h_A によって，

$Y_A = a \cdot h_A$ で決まる。

個人Ａの１日の満足度 U_A は次の式で示されると仮定する。（※1）

$$U_A = Y_A - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2$$ （※2）

ただし，個人Ａは，最も満足度が大きくなるように１日に働く時間 h_A を調整することで日給 Y_A を決定し，満足度が同じ値をとるときは，１日に働く時間 h_A が短くなるような日給 Y_A を選択する。

〔１〕 このとき，個人Ａの満足度を最大にするような日給 Y_A は，$\boxed{ア}$ であり，その時の満足度 U_A は，$\boxed{イ}$ である。

政府が「日給がある水準 $\overline{Y}$ より高い人からは税金を徴収し，$\overline{Y}$ 以下の人には補助金を給付する」政策を新たに実施することにした。ただし，政府は，$\overline{Y}$ を $0 < \overline{Y} \leqq \boxed{ア}$ の範囲で設定し，１日あたりの税金・補助金の額はいずれも一定額 T（T＞0）とする。

〔２〕 この政策のもとでは，個人Ａの満足度 U_A は，次の式で示されるようになると仮定する。ただし，税金を支払うときの満足度と補助金を受け取るときの満足度が同じ大きさの場合には，税金を支払う方を選択する。

$$U_A = Y_A - T - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2 \quad (Y_A > \overline{Y})$$

$$U_A = Y_A + T - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2 \quad (Y_A \leqq \overline{Y})$$

$Y_A > \overline{Y}$ のとき，個人Ａの最大の満足度 U_A は，$\boxed{ウ}$ になる。

（※3）政府が個人Ａから税金を徴収するためには，

・$0 < \overline{Y} \leqq \boxed{ア}$

・$\boxed{ウ} \geqq \overline{Y} + \mathrm{T} - \left(\frac{\overline{Y}}{a}\right)^2$

の２つの条件を同時に満たす様に $\overline{Y}$ を設定する必要がある。いま，$a = 6$，T＝2 とすると，政府が個人Ａから税金を徴収するためには，$0 < \overline{Y} \leqq \boxed{エ}$ の範囲に $\overline{Y}$ を設定する必要がある。

〔３〕 個人Ｂの日給や満足度の式は，個人Ａと同様に表されると仮定して考える。したがって，個人Ｂも，最も満足度が大きくなるように１日に働く時間 h_B を調整することで日給 Y_B を決定し，満足度が同じ値をとるときは，１日に働く時間 h_B が短くなるような日給 Y_B を選択する。また個人Ｂの時間給 b は $b > 0$ とする。いま，$\overline{Y} = \boxed{エ}$，T＝2 とする。このとき，個人Ｂが補助金を受け取ることになる時間給 b の範囲は $\boxed{オ}$ である。

[1]

満足度 $U_A = Y_A - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2$

$= -\frac{1}{a^2}\left(Y_A - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$

したがって　日給 $Y_A = \frac{a^2}{2}$ …(ア)のとき

満足度の最大値は $\frac{a^2}{4}$ …(イ)

[2]

満足度 $U_A = Y_A - T - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2$

$= -\frac{1}{a^2}\left(Y_A - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - T$

したがって　日給 $Y_A = \frac{a^2}{2}$ のとき

満足度の最大値は $\frac{a^2}{4} - T$ …(ウ)

(※4)

$U_A = Y_A \underset{\sim\sim}{-T} - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2$ …①

$U_A = Y_A \underset{\sim\sim}{+T} - \left(\frac{Y_A}{a}\right)^2$ …② とすると

①②の違いは 〰 部であり，①が一定額Tを減らされる（納税），②が一定額Tが増加する（補助を受ける）ことがわかる

政府が税金を徴収するためには

- $0 < \bar{Y} \leqq \boxed{ア} = \frac{a^2}{2}$ かつ
- $\boxed{ウ} = \frac{a^2}{4} - T \geqq \bar{Y} + T - \left(\frac{\bar{Y}}{a}\right)^2$ …③

(※5)

が成り立つときであり，$a=6$，$T=2$ のときは

$$\begin{cases} 0 < \bar{Y} \leqq 18 \\ 7 \geqq \bar{Y} + 2 - \frac{\bar{Y}^2}{36} \end{cases}$$

これを解いて　$0 < \bar{Y} \leqq \underset{(エ)}{6}$

[3]

個人Bが補助金を受けとるのは個人Aにおいて成り立った③がBでは成り立たないときである．

すなわち　$\frac{b^2}{4} - T < \bar{Y} + T - \left(\frac{\bar{Y}}{b}\right)^2$

$\bar{Y} = \boxed{エ} = 6$，$T = 2$ のとき

$\frac{b^2}{4} - 2 < 6 + 2 - \frac{36}{b^2}$

$\frac{b^2}{4} - 10 + \frac{36}{b^2} < 0$

$b^4 - 40b^2 + 144 < 0$

$(b^2 - 4)(b^2 - 36) < 0$

$4 < b^2 < 36$

$b > 0$ なので　$2 < b < 6$ …(オ)

(※1)「～と仮定する」

「～と定義する」ということであるが受験生には「意味不明」と言われる内容である．

余談ですが，「$a \odot b = a + b + 2ab$ と定義するとき $3 \odot 2$ を求めよ」といったタイプの問題，最近見かけなくなりました．

(※2)　2次関数と思えるかが勝負．

(※3)「～するためには……する必要がある」

なぜ？と思わず，素直に受け入れて計算する（なぜ？と思った人は → (※5)へ）

(※4) 解答としては不要だが，これがわかると(※3)(※5)の意味がわかる．

(※5) この式の意味は

（納税時の満足度の最大値）

≧（補助を受けるときの満足度）

すなわち「たとえ補助金を受けなくても努力と工夫で満足度が高い人には納税してもらいます」ということ．