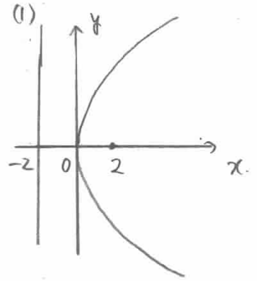
教科書　「式と曲線」　第1節　2次曲線　（練習、問題の解答）

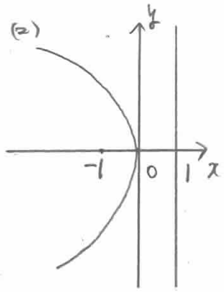
【練習1】次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2=-4x$　　(3)　$y^2=x$

(1)


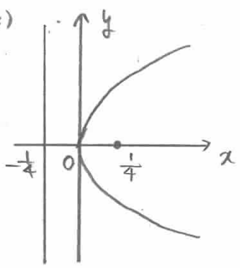
焦点 $(2,0)$

準線 $x=-2$

(2)


焦点 $(-1,0)$

準線 $x=1$

(3)


焦点 $\left(\frac{1}{4},0\right)$

準線 $x=-\frac{1}{4}$

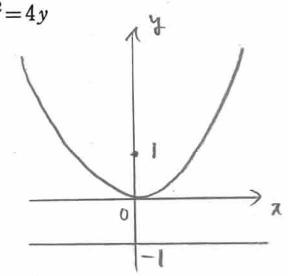
【練習2】焦点が点$(-2,\ 0)$で，準線が直線$x=2$である放物線の方程式を求めよ。

$y^2=4\times(-2)\cdot x$

$\therefore\ y^2=-8x$

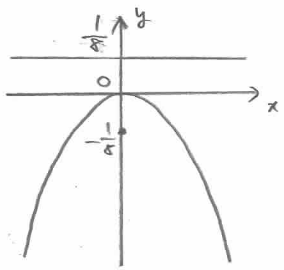
【練習3】次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$x^2=4y$　　(2)　$y=-2x^2$

(1)


焦点 $(0,1)$

準線 $y=-1$

(2) $x^2=-\frac{1}{2}y$


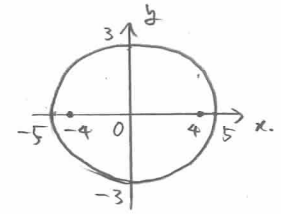
焦点 $\left(0,-\frac{1}{8}\right)$

準線 $y=\frac{1}{8}$

【練習4】次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

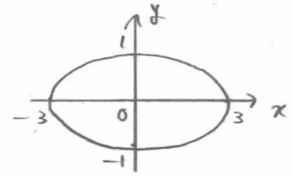
(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$　　(3)　$x^2+16y^2=16$

$\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$

(1)


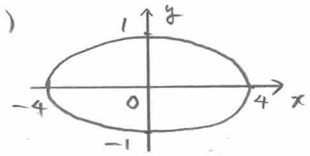
焦点 $(4,0),(-4,0)$

長軸 10、短軸 6

(2)


焦点 $(2\sqrt{2},0),(-2\sqrt{2},0)$

長軸 6、短軸 2

(3)


焦点 $(\sqrt{15},0),(-\sqrt{15},0)$

長軸 8、短軸 2

【練習5】2点$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$を焦点とし，焦点からの距離の和が4である楕円の方程式を求めよ。

求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$ とおける

焦点からの距離の和は $2a=4$　$\therefore a=2$

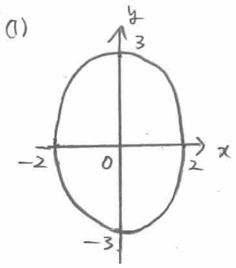
また、焦点について、$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$

$4-b^2=3$　$\therefore b^2=1$

よって $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

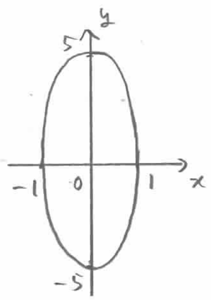
【練習6】次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　(2)　$x^2+\dfrac{y^2}{25}=1$

(1)


焦点 $(0,\sqrt{5}),(0,-\sqrt{5})$

長軸 6、短軸 4

(2)


焦点 $(0,2\sqrt{6}),(0,-2\sqrt{6})$

長軸 10、短軸 2

【練習7】円$x^2+y^2=3^2$を，x軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ。

(1)　y軸方向に$\dfrac{2}{3}$倍　　(2)　y軸方向に$\dfrac{4}{3}$倍

円上の点$Q(s,t)$とすると、$s^2+t^2=9$ …①

Qが移る点を$P(x,y)$とすると、

(1)　$x=s,\ y=\frac{2}{3}t$ より

$s=x,\ t=\frac{3}{2}y$ …②

②を①に代入して、

$x^2+\frac{9}{4}y^2=9$　　$\therefore\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(2)　$x=s,\ y=\frac{4}{3}t$ より、

$s=x,\ t=\frac{3}{4}y$ …②

②を①に代入して、

$x^2+\frac{9}{16}y^2=9$　　$\therefore\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

【練習8】座標平面上において，長さが7の線分ABの端点Aはx軸上を，端点Bはy軸上を動くとき，線分ABを3：4に内分する点Pの軌跡を求めよ。

$P(x,y)$、$A(a,0)$、$B(0,b)$ とすると、

$AB=7$ より　$a^2+b^2=49$ …①

点Pは線分ABを3:4に内分するので、

$x=\dfrac{4a}{7}$、$y=\dfrac{3b}{7}$

$\therefore\ a=\frac{7}{4}x$、$b=\frac{7}{3}y$ …②

②を①に代入すると、

$\frac{49}{16}x^2+\frac{49}{9}y^2=49$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

よって点Pの軌跡は、

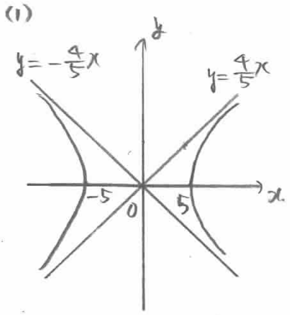
楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

【練習9】次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

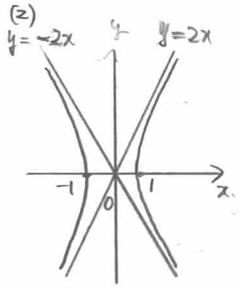
(1) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$　(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　(3) $x^2-9y^2=9$

$\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$

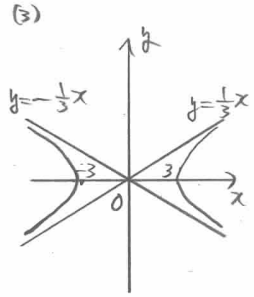
(1)



(2)



(3)



焦点 $(\sqrt{41},0)$, $(-\sqrt{41},0)$　　$(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$　　$(\sqrt{10},0)$, $(-\sqrt{10},0)$

頂点 $(5,0)$, $(-5,0)$　　$(1,0)$, $(-1,0)$　　$(3,0)$, $(-3,0)$

漸近線 $y=\pm\frac{4}{5}x$.　　$y=\pm 2x$　　$y=\pm\frac{1}{3}x$

【練習10】2点 (5, 0), (−5, 0) を焦点とし，焦点からの距離の差が8である双曲線の方程式を求めよ。

求める双曲線を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると，

焦点からの距離の差より $2a=8$　$\therefore a=4$

焦点より $\sqrt{a^2+b^2}=5$

$16+b^2=25$　$\therefore b^2=9$

よって $\underline{\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1}$

【練習11】2点 (2, 0), (−2, 0) を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

直角双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ とおける。

焦点より $\sqrt{a^2+a^2}=2$

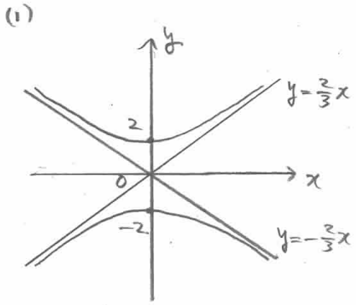
$2a^2=4$　$\therefore a^2=2$.

よって $\underline{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1}$

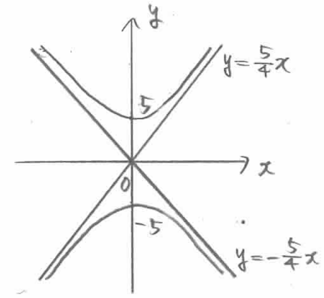
【練習12】次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$

(1)



(2)



焦点 $(0,\sqrt{13})$, $(0,-\sqrt{13})$　　焦点 $(0,\sqrt{41})$, $(0,-\sqrt{41})$

頂点 $(0,2)$, $(0,-2)$　　頂点 $(0,5)$, $(0,-5)$

漸近線 $y=\pm\frac{2}{3}x$.　　漸近線 $y=\pm\frac{5}{4}x$.

【練習13】楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を，…① x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

$\underline{\dfrac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1}$ …②

①の焦点 $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$ より

②の焦点 $\underline{(\sqrt{3}+3,-2)$, $(-\sqrt{3}+3,-2)}$

【練習14】放物線 $y^2=4x$ を，…① x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

$\underline{(y-2)^2=4(x+1)}$ …②

①の焦点 $(1,0)$ より

②の焦点 $\underline{(0,2)}$

【練習15】次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$

(2) $y^2+8y-16x=0$

(3) $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

(1) $(x+3)^2-9+4(y-1)^2-4+9=0$

$(x+3)^2+4(y-1)^2=4$

$\dfrac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2=1$

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す。

(2) $(y+4)^2-16=16x$

$(y+4)^2=16(x+1)$

これは 放物線 $y^2=16x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線を表す。

(3) $4(x-2)^2-9(y+2)^2=36$

$\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

これは 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線を表す。

【練習16】k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ …① と直線 $y=x+k$ …② の共有点の個数を調べよ。

②を①に代入して

$x^2-2(x+k)^2=4$

$-x^2-4kx-2k^2=4$

$x^2+4kx+2k^2+4=0$

判別式 D とすると，

$D/4=4k^2-(2k^2+4)=2k^2-4$

$=2(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})$

$$\begin{cases} D>0 \text{ つまり } & k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k \text{ のとき　2個.} \\ D=0 \text{ つまり } & k=\pm\sqrt{2} \text{ のとき　1個.} \\ D<0 \text{ つまり } & -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \text{ のとき　0個.} \end{cases}$$

教科書　「式と曲線」　第1節　2次曲線　（練習、問題の解答）

【練習17】楕円 $x^2+9y^2=9$ と直線 $y=x+2$ の2つの交点をP，Qとするとき，線分PQの中点Mの座標を求めよ。

$x^2+9y^2=9 \cdots ①$　　$y=x+2 \cdots ②$

②を①に代入して，　$x^2+9(x+2)^2=9$

$10x^2+36x+27=0 \cdots ③$

点P，Qのx座標をそれぞれα，βとすると，

α，βは③の解なので，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{36}{10}=-\frac{18}{5}$

M(x，y)とすると，　$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{5}$

Mは②上の点なので，　$y=-\frac{9}{5}+2=\frac{1}{5}$

$\therefore M\left(-\frac{9}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

【練習18】点C(4, 0)から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

点Cを通る直線は傾きmとすると，$y=m(x-4)$ とおける。

放物線に代入して，　$m^2(x-4)^2=-4x$

$m^2x^2-4(2m^2-1)x+16m^2=0 \cdots ①$

判別式Dとすると　$D=0$

$\frac{D}{4}=4(2m^2-1)^2-16m^4=0$

$-16m^2+4=0$　　$m=\pm\frac{1}{2}$

接線　$y=\frac{1}{2}x-2$，　$y=-\frac{1}{2}x+2$

接点　$(-4,\ -4)$，　$(-4,\ 4)$　mを①に代入

【練習19】点F(4, 0)からの距離と，直線 $x=1$ からの距離の比が2：1である点Pの軌跡を求めよ。

点P(x，y)とする。Pから直線 $x=1$ に下ろした垂線PHとすると。

$PF : PH = 2 : 1$

$PF = 2PH$

$PF^2 = 4PH^2$

$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2$

$3x^2-y^2=12$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

求める軌跡は双曲線　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

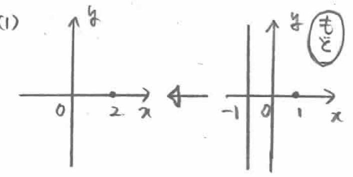
【問題1】次のような2次曲線の方程式を求めよ。

(1)　焦点が点(2, 0)で，準線がy軸である放物線

(2)　2点A(−3, 1)，B(3, 1)からの距離の和が10である楕円

(3)　2点(3, 0)，(−3, 0)を焦点とし，2点(2, 0)，(−2, 0)を頂点とする双曲線

(1)



焦点(1, 0)，準線 $x=-1$ である放物線をx軸方向に1だけ平行移動したものなので，

もとの放物線　$y^2=4x$ より

$y^2=4(x-1)$

(2)　2点(−3, 0)，(3, 0)からの距離の和が10である楕円をy軸方向に1だけ平行移動したものなので，

もとの楕円　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とすると，$(a>b)$

$2a=10$　　$\therefore a=5$

$\sqrt{a^2-b^2}=3$　　$\therefore b^2=16$

よって　$\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

(3)　求める双曲線を　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とすると。

$a=2$.

$\sqrt{a^2+b^2}=3$　　$\therefore b^2=5$

よって　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

【問題2】円 $x^2+y^2=16$ を，y軸をもとにしてx軸方向に2倍して得られる曲線の方程式を求めよ。

円上の点Q(s，t)とすると，　$s^2+t^2=16 \cdots ①$

Qを移す点をP(x，y)とすると。

$x=2s$，　$y=t$

$\therefore s=\frac{1}{2}x$，　$t=y \cdots ②$

②を①に代入して，

$\frac{1}{4}x^2+y^2=16$

$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$

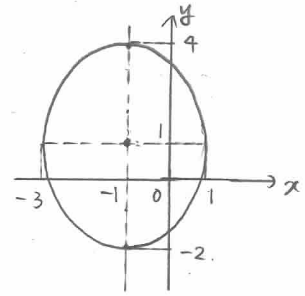
【問題3】曲線 $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$ は楕円であることを示し，その概形をかけ。また，焦点の座標を求めよ。

$9(x+1)^2+4(y-1)^2=36$

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

これは楕円　$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ をx軸方向に−1，y軸方向に1だけ平行移動したもの。

もとの焦点$(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$ より，　焦点$(-1,\ \sqrt{5}+1)$，$(-1,\ -\sqrt{5}+1)$



【問題4】kは定数とする。双曲線 $4x^2-9y^2=36$ と直線 $x+y=k$ の共有点の個数を調べよ。また，双曲線と直線が接するとき，その接点の座標を求めよ。

$4x^2-9y^2=36 \cdots ①$

$y=-x+k \cdots ②$

②を①に代入して，

$4x^2-9(-x+k)^2=36$

$-5x^2+18kx-9k^2=36$

$5x^2-18kx+9k^2+36=0 \cdots ③$

判別式Dとすると。

$\frac{D}{4}=81k^2-5(9k^2+36)=36(k^2-5)$

$D>0$ つまり　$k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$　のとき　2個

$D=0$ つまり　$k=\pm\sqrt{5}$　のとき　1個

$D<0$ つまり　$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$　のとき　0個

接するとき　$k=\pm\sqrt{5}$

$k=\sqrt{5}$ のとき　③より　$5x^2-18\sqrt{5}x+81=0$

$(\sqrt{5}x-9)^2=0$　　$\therefore x=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

接点$\left(\frac{9\sqrt{5}}{5},\ -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のとき　③より　$5x^2+18\sqrt{5}x+81=0$

$x=-\frac{9\sqrt{5}}{5}$　　接点$\left(-\frac{9\sqrt{5}}{5},\ \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

【問題5】点 C(3, 0) から楕円 $2x^2+y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

点Cを通る直線は傾きmとすると、$y=m(x-3)$

楕円に代入して、$2x^2+m^2(x-3)^2=2$.

$(m^2+2)x^2-6m^2x+9m^2-2=0$ …①

接するので、判別式Dとすると、$D=0$

$\frac{D}{4}=9m^4-(m^2+2)(9m^2-2)=0$

$-16m^2+4=0$　　$\therefore m=\pm\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2}$ のとき　接線 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

①より　$\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$

$9x^2-6x+1=0$

$(3x-1)^2=0$　　接点 $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

$m=-\frac{1}{2}$ のとき　接線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

①より　$(3x-1)^2=0$　　接点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

〔問題6〕
原点 O からの距離と，直線 $x=3$ からの距離の比が一定で $e:1$ である点 P について，e が次の値のときの軌跡を求めよ。

(1) $e=\frac{1}{2}$　　(2) $e=1$　　(3) $e=2$

$P(x,y)$ とする。Pから直線 $x=3$ に垂線PHを下ろすと、

$PO:PH=e:1$

$PO=ePH$

$PO^2=e^2PH^2$

$x^2+y^2=e^2(x-3)^2$

$(e^2-1)x^2-6e^2x+9e^2-y^2=0$

(1) $e=\frac{1}{2}$ のとき

$-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-y^2=0$

$3x^2+6x-9+4y^2=0$

$3(x+1)^2+4y^2=12$

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

よって P の軌跡は、楕円 $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) $e=1$ のとき

$-6x+9-y^2=0$　　$\therefore y^2=-6x+9$

よって Pの軌跡は 放物線 $y^2=-6x+9$

(3) $e=2$ のとき

$3x^2-24x+36-y^2=0$

$3(x-4)^2-12-y^2=0$

$3(x-4)^2-y^2=12$

$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

よって P の軌跡は、双曲線 $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$