教科書　「極限」　第2節　関数の極限　（練習、問題の解答）

【練習19】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$　(2) $\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$　(4) $\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

(1) (xに1を代入して)

$\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$

$= 2-3-1 = \underline{-2}$

(2) $\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

$= \underline{0}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$

$= \frac{1}{-3} = \underline{-\frac{1}{3}}$

(4) $\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

$= \underline{\sqrt{2}}$

【練習20】次の極限を求めよ。ただし，(3) の a は 0 でない定数とする。

(1) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$　(2) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$　(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

そのまま x を近づけると $\frac{0}{0}$ になるものを不定形という
このときは約分して不定形を解消すること。

(1) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to-3}(x-3) = \underline{-6}$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2} = \underline{-3}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{a+x-a}{a(a+x)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{a(a+x)} = \underline{\frac{1}{a^2}}$

【練習21】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$　$\frac{0}{0}$ 不定形　(2) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$　$\frac{0}{0}$ 不定形

不定形でルートがあるときは有理化で解消すること。

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$= \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \underline{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)$

$= \underline{4}$

【練習22】次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$ …①　(2) $\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$ …②

(分母)→ 0 となるときの極限のパターンは2つ。
① $\frac{定数}{0} \longrightarrow \infty$ (分母が限りなく小さくなるので、分子の定数が限りなく大きくなるので∞に近づく)
② $\frac{0}{0} \longrightarrow$ 定数 (練習21でやったとおり)
つまり、極限値をもつのは②のパターンのときだけ!!

(1) $\lim_{x\to2}(x-2)=0$ より $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=0$　∴ $\sqrt{2}a+b=0$
$b=-\sqrt{2}a$

①に代入して $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}-\sqrt{2}a}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$

$= \lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1$

よって $\underline{a=-2\sqrt{2},\ b=4}$

(2) $\lim_{x\to0}x=0$ より $\lim_{x\to0}(a\sqrt{x+4}+b)=0$　∴ $2a+b=0$
$b=-2a$

②に代入して $\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}-2a}{x} = \lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}$

$= \lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{a}{4} = 1$　$\underline{∴ a=4,\ b=-8}$

【練習23】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}$　$+\frac{定数}{0} \longrightarrow \infty$　(2) $\lim_{x\to-1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$　$-\frac{定数}{0} \longrightarrow -\infty$

(1) $= \underline{\infty}$

(2) $= \underline{-\infty}$

【練習24】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$　(2) $\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$　(3) $\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　(4) $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

($x\to+0$ ということは $x>0$ なので $|x|=x$
$x\to-0$ 〃 $x<0$ 〃 $|x|=-x$)

(1) $\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{x} = \underline{1}$

(2) $\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{-x}{x} = \underline{-1}$

(3) $\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1+0}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1+0}(x+1) = \underline{2}$

(4) $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1-0}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to1-0}(-x-1) = \underline{-2}$

【練習25】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}$　$\frac{1}{+0}$　(2) $\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}$　$\frac{1}{-0}$

(1) $= \underline{\infty}$

(2) $= \underline{-\infty}$

【練習26】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$　(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$　$\frac{1}{\infty}$

$= \underline{0}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$　$\frac{1}{-\infty}$

$= \underline{0}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$　$\infty-\infty$ 不定形

$= \lim_{x\to\infty}x(x-2)$　$\infty\times\infty$

$= \underline{\infty}$

(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$　$\infty-\infty$

$= \lim_{x\to-\infty}x(x+3)$　$-\infty\times(-\infty)$

$= \underline{\infty}$

【練習27】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$　(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{ の不定形は分母の最高次数で分母・分子を割る}}$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-x}{3+\frac{2}{x}}=-\infty$　(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

【練習28】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$　$\infty-\infty$　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$　$\infty-\infty$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$　$\frac{\infty}{\infty}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$　分母分子をxで割る　√の中はx^2で割ることになる

$=\frac{2}{2}=1$

(2) $\boxed{x\to-\infty\text{ で不定形, ルートを含むときは. }x=-t\text{とおきかえる}}$

$x=-t$とすると, $x\to-\infty$のとき $t\to\infty$

(与式)$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2-2t-4t^2}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2}$

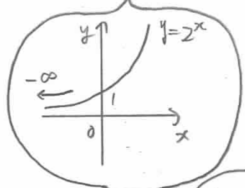
$=-\frac{1}{2}$

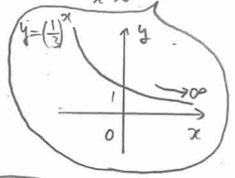
【練習29】次の極限を求めよ。

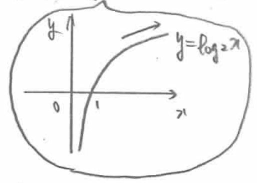
(1) $\lim_{x\to-\infty}2^x$　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$　(3) $\lim_{x\to\infty}\log_2 x$　(4) $\lim_{x\to+0}\log_{0.5}x$

$\boxed{\text{指数・対数の極限はグラフで考える!!}}$

(1) $\lim_{x\to-\infty}2^x=0$　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$　(3) $\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$

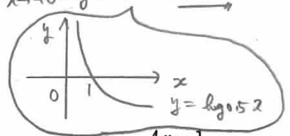






(別解)(1) $2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0$ と考えてもよい(解答は0のみ)

(4) $\lim_{x\to+0}\log_{0.5}x=\infty$



【練習30】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}2^{-3x}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}$　(3) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}$

(1) ($2^{-\infty}$となるので $\frac{1}{2^{\infty}}\to 0$ より) $\lim_{x\to\infty}2^{-3x}=0$

(2) (2^{∞} より) $\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}=\infty$

(3) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\log_2 4=2$

【練習31】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}$　(3) $\lim_{x\to\pi}\tan x$

(1) $=\sin 0=0$　(2) $=\cos 0=1$　(3) $=\tan\pi=0$

【練習32】次の極限を求めよ。　$\boxed{\text{はさみうちの原理}}$

(1) $\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

(1) $0\leqq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq1$ より $0\leqq|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$0\leqq\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$

ここで $\lim_{x\to0}|x|=0$ なので はさみうちの原理より

$\lim_{x\to0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=0$　∴ $\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0$

$\boxed{\text{なぜ絶対値記号をつけるのかと言うと、}x\to0\text{ ということは }x\to+0\text{ と }x\to-0\text{ のときを考えないといけないので、まとめて計算するために、絶対値をつけるのです}}$

(2) $-1\leqq\sin x\leqq1$　$x\to\infty$のとき $x>0$より　$-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ なので はさみうちの原理より $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(3) $-1\leqq\cos x\leqq1$　$x\to-\infty$のとき $x<0$より　$\frac{1}{x}\leqq\frac{\cos x}{x}\leqq-\frac{1}{x}$

以下同様 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

【練習33】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}$　(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$　(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$　$\boxed{\lim_{\triangle\to0}\frac{\sin\triangle}{\triangle}=1}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1$

@ $\boxed{\text{よって }\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1\text{ も公式同様にあつかってもよい}}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{5x}{\sin 5x}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{3}{5}$

@ $\boxed{\lim_{\triangle\to0}\frac{\triangle}{\sin\triangle}=\lim_{\triangle\to0}\frac{1}{\frac{\sin\triangle}{\triangle}}=1\text{ なので, }\lim_{\triangle\to0}\frac{\triangle}{\sin\triangle}=1\text{ も公式同様に扱ってよい。}}$

つまり $\lim_{\triangle\to0}\frac{\sin\triangle}{\triangle}=1$, $\lim_{\triangle\to0}\frac{\triangle}{\sin\triangle}=1$, $\lim_{\triangle\to0}\frac{\tan\triangle}{\triangle}=1$

教科書　「極限」　第2節　関数の極限　（練習、問題の解答）

【練習34】次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ← $\dfrac{0}{0}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\cos x-1}$

(1) (分母・分子に $1+\cos x$ をかけて、$\sin x$ を作り出す)

$$(与式)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{2}}$$

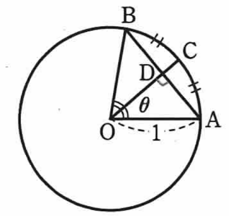
(2)
$$(与式)=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{-(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{-(1-\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{-\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x}{\sin x}\right)\times(1+\cos x)$$

$$=-1\times2=\underline{-2}$$

【練習35】

半径1の円Oの周上に中心角 θ ラジアンの弧ABをとり，弧ABを2等分する点をCとする。また，線分OCと弦ABの交点をDとする。弧ABの長さを $\overset{\frown}{AB}$ で表すとき，極限 $\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{CD}{\overset{\frown}{AB}^2}$ を求めよ。



$OD=\cos\frac{\theta}{2}$ より　（$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{OD}{OA}$）

$CD=1-\cos\frac{\theta}{2}$　，　$\overset{\frown}{AB}=\theta$　（弧度法は単位円の弧の長さが扇形の中心角）

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{CD}{\overset{\frown}{AB}^2}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2(1+\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2(1+\cos\frac{\theta}{2})}=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4(1+\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$=1\times\frac{1}{8}$$

$$=\underline{\frac{1}{8}}$$

【練習36】次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x)=x[x]$　　(2) $f(x)=(x+1)[x]$　　(3) $f(x)=\sqrt{x}$

> $x=a$ で連続（グラフがつながっている）のは、
> ① $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$　（$x=a$ の極限値が存在する）
> ② $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$　（$x=a$ の極限値と y 座標が等しい）

(1) $\lim\limits_{x\to+0}x[x]=0$，$\lim\limits_{x\to-0}x[x]=0$，$f(0)=0$ なので、

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ となるので $x=0$ で<u>連続</u>

(2) $\lim\limits_{x\to+0}(x+1)[x]=1$，$\lim\limits_{x\to-0}(x+1)[x]=-1$

よって $\lim\limits_{x\to+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ となるので<u>不連続</u>

(3) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}=0$，$f(0)=0$ より

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=f(0)$ となるので、$x=0$ で<u>連続</u>

【練習37】次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

(1) 定義域 $1-x\geqq0$
$x\leqq1$ より

区間 $(-\infty,1]$ で
連続

(2) $=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

定義域 $x\neq1$，$x\neq2$ より

区間 $(-\infty,1)$、$(1,2)$、$(2,\infty)$ の
それぞれで連続

【練習38】次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ。

(1) $[0,\ \pi]$　　(2) $[-\pi,\ \pi]$

(1) $f(x)$ は区間 $[0,\pi]$ で連続である。← 必ずいる

Max. 1　（$x=0$ のとき）
min. -1　（$x=\pi$ のとき）

(2) $f(x)$ は区間 $[-\pi,\pi]$ で連続である。

Max. 1　（$x=0$ のとき）
min. -1　（$x=\pi$、$-\pi$ のとき）

【練習39】方程式 $2^x-3x=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

$f(x)=2^x-3x$ とすると、$f(x)$ は区間 $[3,4]$ で連続である。

また、$f(3)=8-9=-1<0$
$f(4)=16-12=4>0$

よって $2^x-3x=0$ は $3<x<4$ で少なくとも1つの実数解をもつ。

【問題7】次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$ ← $\dfrac{0}{0}$　　(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$ ← $\dfrac{0}{0}$

(1)
$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}=\underline{\frac{1}{3}}$$

(2)
$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{2x-(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})$$

$$=2+2$$

$$=\underline{4}$$

【問題8】関数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-2}$ について，<u>$x\to2$ のときの極限値が存在するように</u>，定数 a の値を定め，極限値 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ を求めよ。

⇓
分母 $\to0$ なので分子 $\to0$

$\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ より　$\lim\limits_{x\to2}(x^2+a)=0$ となる。

$4+a=0$　　$\therefore\ \underline{a=-4}$

このとき
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+2)$$

$$=\underline{4}$$

【問題9】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$　$\infty-\infty$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$　$\frac{1}{\infty}$

$$= \underline{0}_{\,/\!/}$$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$　$\infty-\infty$　$x\to-\infty$で 不定形でルート

$x=-t$ とすると、$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

$$(与式) = \lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+1}-t)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}$$　$\frac{1}{\infty}$

$$= \underline{0}_{\,/\!/}$$

【問題10】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$　$\frac{0-\infty}{0+\infty}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\}$

(1) (分母/分子を 2^{-x} でわる)

$$(与式) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}$$　$\lim_{x\to-\infty}2^{2x} \to 2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}\to 0$

$$= \underline{-1}_{\,/\!/}$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2+4}{2x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \log_2\frac{1}{2}$$

$$= \underline{-1}_{\,/\!/}$$

【問題11】次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$　　(2) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}_{\,/\!/}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{-(1-\cos 2x)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{-(1-\cos^2 2x)}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{-\sin^2 2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left\{-\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\times\frac{1+\cos 2x}{4}\right\}$$

$$= -1\times\frac{2}{4} = \underline{-\frac{1}{2}}_{\,/\!/}$$

【問題13】$x-\pi=\theta$ とおくことにより，極限 $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ を求めよ。

$x\to\pi$ のとき $\theta\to0$

また $x=\theta+\pi$ より　$\cos x=\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$

$$(与式) = \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}_{\,/\!/}$$

【問題13】次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように，定数 a の値を定めよ。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x}{x} & (x\neq0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

$\lim_{x\to+0}f(x) = \lim_{x\to+0}(x+1) = 1$.

$\lim_{x\to-0}f(x) = \lim_{x\to-0}(x+1) = 1$　よって $\lim_{x\to0}f(x)=1$

連続となるとき，$f(0)=1$ となればよいので．

$$\underline{a=1}_{\,/\!/}$$

【問題14】方程式 $x^3-3x+1=0$ は負の解をもつことを示せ。

$f(x)=x^3-3x+1$ とすると，区間 $[-2,0]$ で連続である

ここで，$f(-2)=-8+6+1=-1<0$

$f(0)=1>0$

よって　$x^3-3x+1=0$ は 負の解をもつ．

(注) $f(0)>0$ なので，y座標が負になるxの値を1つ見つければ，中間値の定理より，負の部分でx軸と交わることがわかる。

$x=-2$ がすぐに見つかるので，$f(-2)$ の値を計算しただけ。

別に $f(-3)$ でもかまわない。