教科書　「微分法」　第2節　いろいろな関数の導関数　（練習、問題の解答）

【練習16】関数 $\cos x$ の導関数が，次のようになることを示せ。

$$(\cos x)' = -\sin x$$

(証)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$= -\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} - \sin x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1}$$

$$= -\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} - \sin x$$

$$= -\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{=1}\cdot\frac{\overset{=0}{\sin h}}{1+\cos h} - \sin x = -\sin x$$

(終)

【練習17】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos 2x$　(2) $y=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $y=\sin^2 x$　(4) $y=\tan^2 x$

(5) $y=\frac{1}{\sin x}$　(6) $y=\cos^2 3x$

(1) $y' = -\sin 2x\times(2x)'$
$= -2\sin 2x$

(2) $y' = 3\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $y' = 2\sin x\times(\sin x)'$
$= 2\sin x\cos x = \sin 2x$

(4) $y' = 2\tan x\cdot(\tan x)'$
$= \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$

(5) $y' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}$
$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(6) $y' = 2\cos 3x\times(\cos 3x)'$
$= 2\cos 3x\times(-3\sin 3x)$
$= -6\sin 3x\cos 3x$　ここで終わってもいい。
$= -3\sin 6x$

【練習18】次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\sin x+\cos x$　(2) $y=x\cos x-\sin x$

(1) $y' = \sin x + x\cos x - \sin x$
$= x\cos x$

(2) $y' = \cos x - x\sin x - \cos x$
$= -x\sin x$

【練習19】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log 3x$　(2) $y=\log_2(4x-1)$

(3) $y=\log(x^2+1)$　(4) $y=x\log x-x$

(1) $y' = \frac{(3x)'}{3x} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

(2) $y' = \frac{4}{(4x-1)\log 2}$

(3) $y' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$
$= \frac{2x}{x^2+1}$

(4) $y' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$
$= \log x$

【練習20】$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$ であることを示せ。ただし，a は1でない正の定数とする。

(証)

$x>0$ のとき

$$(\log_a|x|)' = (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}$$

$x<0$ のとき

$$(\log_a|x|)' = \{\log_a(-x)\}' = \frac{(-x)'}{-x\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

よって $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$　(終)

【練習21】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|3x+2|$　(2) $y=\log|\sin x|$　(3) $y=\log_2|x^2-4|$

(1) $y' = \frac{(3x+2)'}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$

(2) $y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

(3) $y' = \frac{(x^2-4)'}{(x^2-4)\log 2} = \frac{2x}{(x^2-4)\log 2}$

【練習22】$\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$ …①　(2) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

$(\log|y|)' = \frac{y'}{y}$ より

(1) $\log|y| = \log\frac{|x+1|^3}{|x-1||x+2|^2} = 3\log|x+1| - \log|x-1| - 2\log|x+2|$

$$(\log|y|)' = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3(x-1)(x+2)-(x+1)(x+2)-2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{-6}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

両辺に×yをつまり ×①をする.

$$\therefore y' = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^2(x+2)^3}$$

(2) $\log|y| = \log\frac{\sqrt{x+2}}{|x+1|} = \frac{1}{2}\log(x+2) - \log|x+1|$

$$(\log|y|)' = \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x-3}{2(x+2)(x+1)}$$

$$\therefore y' = -\frac{x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}$$

【練習23】次の公式を証明せよ。

α が実数のとき　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

(証) $y = x^\alpha$ とする.　$\log|y| = \alpha\log|x|$

$$(\log|y|)' = \frac{\alpha}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

$$\therefore y' = x^\alpha\times\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(終)

教科書 「微分法」 第2節 いろいろな関数の導関数 （練習、問題の解答）

【練習24】$(e^x)'=e^x$ であることを確かめよ。

$(a^x)'=a^x\log a$ より

$a=e$ とすると $(e^x)'=e^x\log e$

ここで $\log e=1$ より $(e^x)'=e^x$

【練習25】次の関数を微分せよ。ただし，(6) の a は1でない正の定数とする。

(1) $y=e^{2x}$　(2) $y=e^{-x^2}$　(3) $y=3^x$

(4) $y=2^{-3x}$　(5) $y=xe^x$　(6) $y=(2x-1)a^x$

(1) $y'=e^{2x}\times(2x)'$
$=2e^{2x}$

(2) $y'=e^{-x^2}\times(-x^2)'$
$=-2xe^{-x^2}$

(3) $y'=3^x\log 3$

(4) $y'=2^{-3x}\log 2\times(-3x)'$
$=-3\cdot 2^{-3x}\log 2$

(5) $y'=e^x+xe^x$
$=(1+x)e^x$

(6) $y'=2a^x+(2x-1)a^x\log a$

【練習26】次の関数について，第3次までの導関数を求めよ。ただし，(1) の a は0でない定数とする。

(1) $y=ax^3$　(2) $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$　(3) $y=\cos x$

(4) $y=\log x$　(5) $y=e^x$　(6) $y=e^{-2x}$

(1) $y'=3ax^2$
$y''=6ax$
$y'''=6a$

(2) $y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$
$y''=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$
$y'''=-6x^{-4}=-\frac{6}{x^4}$

(3) $y'=-\sin x$
$y''=-\cos x$
$y'''=\sin x$

(4) $y'=\frac{1}{x}$
$y''=-\frac{1}{x^2}$
$y'''=\frac{2}{x^3}$

(5) $y'=e^x$
$y''=e^x$
$y'''=e^x$

(6) $y'=-2e^{-2x}$
$y''=4e^{-2x}$
$y'''=-8e^{-2x}$

【練習27】次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=x^n$ （n は正の整数）　(2) $y=e^{2x}$

(1) $y'=nx^{n-1}$
$y''=n(n-1)x^{n-2}$
$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
↓
$y^{(n)}=n!\,x^0=n!$

(1) $y'=2e^{2x}$
$y''=2^2e^{2x}$
$y'''=2^3e^{2x}$
↓
$y^{(n)}=2^n e^{2x}$

【練習28】関数 $y=2\sqrt{x}$，$y=-2\sqrt{x}$ をそれぞれ微分して，いずれの場合も $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ であることを確かめよ。

(証) $y=2\sqrt{x}$ について

$y=2x^{\frac{1}{2}}$ より $\frac{dy}{dx}=2\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{y}$

$y=-2\sqrt{x}$ について

$y=-2x^{\frac{1}{2}}$ より $\frac{dy}{dx}=-2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\times\left(\frac{1}{-2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{y}$

よって $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ (終)

【練習29】次の方程式で定められる x の関数 y について，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$　(2) $x^2-y^2=1$

(1) 両辺を x について微分すると

$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

(2) 両辺を x について微分すると

$2x-2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

y^2 を x について微分するときは
合成関数の微分を用いる。
$y=f(x)$ として考えると分かりやすいが，
$\{f(x)^2\}'=2f(x)\cdot f'(x)=2y\cdot y'$ ということである。
（$y'\Rightarrow\frac{dy}{dx}$ と同じ）

【練習30】x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=2t^2$，$y=2t-1$　(2) $x=\cos t$，$y=\sin t$

(1) $\frac{dx}{dt}=4t$，$\frac{dy}{dt}=2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{4t}$
$=\frac{1}{2t}$

(2) $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{dy}{dt}=\cos t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-\sin t}$
$=-\frac{\cos t}{\sin t}$

（$-\frac{1}{\tan t}$ でもよい）

【問題7】次の関数を微分せよ。ただし，(6) の a は1でない正の定数とする。

(1) $y=\frac{1}{1+\cos x}$　(2) $y=\sin^2 x\cos 2x$　(3) $y=(\log x)^2$

(4) $y=\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$　(5) $y=\frac{e^x}{e^x+1}$　(6) $y=a^{2x+1}$

(1) $y'=-\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$
$=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(2) $y'=(\sin^2 x)'\cos 2x+\sin^2 x\cdot(\cos 2x)'$
$=2\sin x\cos x\cos 2x+\sin^2 x\cdot(-2\sin 2x)$
$=\sin 2x\cdot\cos 2x-2\sin 2x\cdot\sin^2 x$
$=\sin 2x(\cos 2x-2\sin^2 x)$

(3) $y'=2\log x\times(\log x)'$
$=\frac{2\log x}{x}$

(4) $y=\log|x+1|-\log|x+2|$
$y'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$
$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

(5) $y'=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$
$=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(6) $y'=a^{2x+1}\log a\times(2x+1)'$
$=2a^{2x+1}\log a$

【問題8】a は定数とする。次のことを示せ。

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a})=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a}) = \frac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}\times 2x}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

分母・分子に $\sqrt{x^2+a}$ をかける。

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{x+\sqrt{x^2+a}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

【問題9】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$　　(2) $y=(x-1)^2\cdot\sqrt[3]{x+2}$

(1) 対数微分法を用いて．$y>0$ より．

$$\log y = 2\{\log(x^2-1)-\log(x^2+1)\}$$

両辺を x で微分して．

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$= 4x\times\frac{2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$\therefore y' = \frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

(2) 対数微分法を用いて．

$$\log|y| = \log|(x-1)^2\cdot\sqrt[3]{x+2}|$$

$$= 2\log|x-1|+\frac{1}{3}\log(x+2)$$

両辺を x で微分して．

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1}+\frac{1}{3(x+2)} = \frac{7x+11}{3(x-1)(x+2)}$$

$$\therefore y' = \frac{7x+11}{3(x-1)(x+2)}\times(x-1)^2\sqrt[3]{x+2} = \frac{(x-1)(7x+11)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

【問題10】関数 $y=e^x(\sin x+\cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

$$y''-2y'+2y=0$$

$$y' = e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x) = 2e^x\cos x.$$

$$y'' = 2(e^x\cos x - e^x\sin x)$$

$$(\text{左辺}) = y''-2y'+2y$$

$$= 2(e^x\cos x-e^x\sin x)-4e^x\cos x+2e^x(\sin x+\cos x)$$

$$= 0$$

【問題11】次の方程式で定められる x の関数 y について，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

$$(x-1)^2+y^2=16$$

両辺を x について微分すると．

$$2(x-1)+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}$$

【問題12】x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\frac{1}{\cos t}$，$y=\tan t$　　(2) $x=t+\frac{1}{t}$，$y=t-\frac{1}{t}$

(1) $$\frac{dx}{dt} = -\frac{(\cos t)'}{\cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\sin t}$$

(2) $$\frac{dx}{dt} = 1-\frac{1}{t^2}\qquad \frac{dy}{dt} = 1+\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$