教科書　「微分法」　第1節　導関数　（練習、問題の解答）

【練習1】関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について，$x=2$ における微分係数を定義に従って求めよ。

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

分子の有理化

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

【練習2】関数 $f(x)=\sqrt{x}$ のグラフ上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

$\underbrace{\text{点 }(3,\ \sqrt{3})\text{ における接線の傾き}}_{=f'(3)}$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$$

＝（練習1）と同様にして

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$\boxed{\text{接線の傾き}=\text{微分係数}}$

【練習3】関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

⇓

$f'(1)$ が存在するかどうかを調べる

⇓

$$\boxed{\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}$$

右側極限 ＝ 左側極限

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|(1+h)^2-1|}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{|h(h+2)|}{h}$$

$h\to +0$ より $h>0$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+2)}{h}$$

$$=2$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h(h+2)|}{h}$$

$h\to -0$ より $h<0$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+2)}{h}$$

$$=-2$$

よって $h\to 0$ のとき $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ の極限はないので，$f(x)$ は $x=1$ で微分不可能.

【練習4】次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=\frac{1}{2x}$　　(2) $f(x)=\sqrt{x}$

(1)
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{2hx(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2x(x+h)}$$

$$=-\frac{1}{2x^2}$$

(2)
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

【練習5】次の公式を証明せよ。

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$$\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

積の微分

$$(fg)'=f'g+fg'$$

【練習6】次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^5+2x^4$　　(2) $y=3x^6-4x^3$

(3) $y=(x+1)(x^3-4x)$　　(4) $y=(3x^2-2)(x^2+x+1)$

(1) $y'=5x^4+8x^3$　　(2) $y'=18x^5-12x^2$

(3)
$$y'=x^3-4x+(x+1)(3x^2-4)$$

$$=x^3-4x+3x^3+3x^2-4x-4$$

$$=4x^3+3x^2-8x-4$$

(4)
$$y'=6x(x^2+x+1)+(3x^2-2)(2x+1)$$

$$=12x^3+9x^2+2x-2$$

【練習7】次の問いに答えよ。

(1) 導関数の定義に従って，次の公式を証明せよ。$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\,g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$=-g'(x)\cdot\frac{1}{\{g(x)\}^2}=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(2) $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ と (1) を用いて，次の公式を証明せよ。

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき　$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

積の微分

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}-f(x)\cdot\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

商の微分

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

教科書　「微分法」　第1節　導関数　（練習、問題の解答）

【練習８】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x-3}$　(2) $y=\dfrac{x}{x^2-2}$　(3) $y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

(1) $y'=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

(2) $y'=\dfrac{x^2-2-x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}$

(3) $y'=\dfrac{2(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

【練習９】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$　(2) $y=-\dfrac{4}{x^2}$　(3) $y=\dfrac{1}{3x^3}$

(1) $y=x^{-1}$ より $y'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

(2) $y=-4x^{-2}$ より $y'=8x^{-3}=\dfrac{8}{x^3}$

(3) $y=\dfrac{1}{3}x^{-3}$ より $y'=-x^{-4}=-\dfrac{1}{x^4}$

合成の微分
$\{f(g)\}'=$ 外$'$ × 中$'$

【練習10】次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+1)^4$　(2) $y=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$

(1) $y'=4(3x+1)^3\cdot(3x+1)'$
$=12(3x+1)^3$

(2) $y'=-\dfrac{2(4x+3)\cdot 4}{(4x+3)^4}$
$=-\dfrac{8}{(4x+3)^3}$

【練習11】次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^2+5)^4$　(2) $y=(1-2x^2)^3$　(3) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

(1) $y'=4(2x^2+5)^3\cdot(2x^2+5)'$
$=16x(2x^2+5)^3$

(2) $y'=3(1-2x^2)^2\cdot(1-2x^2)'$
$=-12x(1-2x^2)^2$

(3) $y'=-\dfrac{3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6}$
$=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

【練習12】関数 $f(x)$，$g(x)$ とその導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ について，次のことを示せ。ただし，a，b は定数，n は整数とする。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$　(2) $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^n=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$

(1) $\upsilon=f(ax+b)$，$u=ax+b$ とすると，

$\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=\dfrac{d\upsilon}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$
$=f'(u)\cdot a$
$=a\cdot f'(ax+b)$

(2) $\upsilon=\{g(x)\}^n$，$u=g(x)$ とすると，

$\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^n=\dfrac{d\upsilon}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=n\cdot u^{n-1}\cdot g'(x)=n\{g(x)\}^{n-1}\cdot g'(x)$

【練習13】逆関数の微分法を用いて，$y=\sqrt[6]{x}$ を微分せよ。

$y=\sqrt[6]{x}$ より $x=y^6$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{6y^5}=\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

【練習14】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt{x}$　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(1) $y=x^{\frac{1}{2}}$ より
$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2) $y=x^{\frac{2}{3}}$ より
$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
$=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(3) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ より
$y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
$=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

【練習15】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

(1) $=(x+1)^{\frac{2}{3}}$
$y'=\dfrac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$
$=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

(2) $=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$
$y'=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4-x^2)'$
$=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$
$=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

P151

【問題1】次の関数を，導関数の定義に従って微分せよ。

$y=\sqrt{x+1}$　　$y=f(x)$ とすると

$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$
$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

【問題2】次の関数を微分せよ。

(1) $y=(1-x^2)(2x^3+5)$　(2) $y=(2x+1)(3x^4-x^3+2)$

(1) $y'=-2x(2x^3+5)+(1-x^2)\cdot 6x^2$
$=-10x^4+6x^2-10x$

(2) $y'=2(3x^4-x^3+2)+(2x+1)(12x^3-3x^2)$
$=30x^4+4x^3-3x^2+4$

【問題3】関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ がいずれも微分可能であるとき，関数 $y=f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ。また，これを用いて，次の関数を微分せよ。

$$y=(x^2+1)(x+2)(3x-4)$$

(証) $y'=\{f(x)(g(x)h(x))\}'$
$=f'(x)\cdot\{g(x)h(x)\}+f(x)\cdot\{g(x)h(x)\}'$
$=f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\{g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\}$
$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$ (終)

$y'=2x(x+2)(3x-4)+(x^2+1)(3x-4)+(x^2+1)(x+2)\cdot 3$
$=6x^3+4x^2-16x+3x^3-4x^2+3x-4+3x^3+6x^2+3x+6$
$=12x^3+6x^2-10x+2$

【問題4】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$　　(2) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$

(1) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(2x-5)(x+1)-(x^2-5x+6)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+2x-11}{(x+1)^2}$

合成の微分

【問題5】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$　　(2) $y=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$

(3) $y=(x+2)^3(2x-1)^4$　　(4) $y=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

(1) $y'=2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'$

$=2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{2}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(2) $y'=3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'$

$=3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

(3) $y'=3(x+2)^2\cdot(2x-1)^4+(x+2)^3\cdot 4(2x-1)^3\cdot 2$

$=(x+2)^2(2x-1)^3\{3(2x-1)+8(x+2)\}$

$=(x+2)^2(2x-1)^3(14x+13)$

(4) $y'=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\dfrac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}$

$=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

【問題6】次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(1) $y=(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ より

$y'=\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+x+1)'$

$=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

(2) $y=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ より

$y'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)'$

$=\dfrac{2x}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$